数理解析研究所講究録
1030巻 1998年 74-85

多重内部波ソリトンの線形安定性、並びに関連した話題

山口大工学部　松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

I. 概要

Benjamin-Ono(BO) 方程式は深い成層流体中の内部波を記述する非線形波動方程式としてよく知られている。線形波の位相速度で動く座標系を導入し、また適当に無次元化することにより BO 方程式は以下のように書ける：

$$u_t + 2uu_x + Hu_{xx} = 0,\ u = u(x,t) \tag{1.1a}$$

$$Hu(x,t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y,t)}{y-x} dy \tag{1.1b}$$

ここで u は波の波形を表す。BO 方程式は完全可積分であり、方程式の構造、解の性質等は十分解明されている。これには次の孤立波解が存在する。

$$u(x,t) = \frac{2a}{a^2(x-at-x_0)^2+1} \tag{1.2}$$

この代数型の解は微小、および有限の攪乱に対して安定であることがわかっている。またBO 方程式にはいわゆる多重ソリトン解（あるいは Nーソリトン解）と呼ばれる厳密解が存在する。これは十分な時間が経過すると (1.2) の形をした多数の孤立波の重ね合わせとして表せる解であるが、ここではこれの線形安定性を、この解のまわりに線形化した BO 方程式の初期値問題を陽に解くことにより証明する。結論として、多重ソリトン解は微小攪乱に対して安定という結果を得た。

次に、小さな摂動項を持つ BO 方程式を考察する。摂動としては散逸や外力が考えられるが、これらの効果により方程式の可積分性は破れ、その解析は摂動論に頼らざるを得ない。ここでは特に多重ソリトン解に対する摂動の影響を、多時間展開法により解析する。具体的には、ソリトンの振幅および位相は時間的にゆるやかに変化すると仮定し、その発

展方程式を導出する。またソリトン解に対する補正項（いわゆるradiation、あるいはtail）に対する表式も、非斉次線形BO方程式の解から導き、これはBO方程式の修正された無限個の保存則と矛盾しないことも示す。最後に散逸摂動の1ーソリトンへの影響を具体的に計算する。なお以下の議論の詳細に関しては文献[1]を、また代数ソリトンの最近の話題については文献[2]を参照されたい。

II. 線形BO方程式とその解

A. 線形BO方程式とその随伴方程式

BO方程式をNーソリトン解uのまわりに線形化した方程式は以下のように書ける：

$$q_t + 2(uq)_x + Hq_{xx} = 0 \tag{2.1}$$

さらに新しい従属変数ψを$q = \psi_x$により導入し、(2.1)をxに関して一回積分すると

$$\psi_t + 2u\psi_x + H\psi_{xx} = 0 \tag{2.2}$$

となる。(2.2)に対する随伴方程式は

$$\tilde{\psi}_t + 2(u\tilde{\psi})_x + H\tilde{\psi}_{xx} = 0 \tag{2.3}$$

と書ける。(2.2)および(2.3)の初期値問題を解くことがここでの主たる目的であるが、その前にNーソリトン解の性質の幾つかを列記しておく。

B. Nーソリトン解の性質

BO方程式のNーソリトン解は行列式により以下のように簡潔に表現できる：

$$u = i\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{f^*(x,t)}{f(x,t)},\ f(x,t) = \prod_{j=1}^{N}[x - x_j(t)],\ \mathrm{Im}\ x_j(t) > 0 \tag{2.4}$$

$$f = \det M \tag{2.5}$$

上式においてf^*はfの複素共役を表す。Mは次に示す成分を持つ$N \times N$の行列である。

$$M = (m_{jk}),\ m_{jk} = \theta_j - \frac{i}{a_j}\ (j = k),\ m_{jk} = -\frac{2i}{a_j - a_k}\ (j \neq k) \tag{2.6}$$

$$\theta_j = x - a_j t - \xi_{j0}$$

ここで $a_j(>0)$ およびξ_{j0}は j番目のソリトンの振幅、および位相を表す。十分大きな時間では上記解は代数ソリトンの重ね合わせとして以下のように表せる。

$$u(x, t \to \pm\infty) \sim \sum_{j=1}^{N} \frac{2a_j}{(a_j\theta_j)^2 + 1} \tag{2.7}$$

C. 線形化 BO 方程式の特解

以下で示すように (2.2) および (2.3) は境界条件により 2 種類の解を有する。

1. 連続スペクトルに対する固有関数

境界条件として無限遠で零とならないもの、すなわち

$$\psi^{\pm} \sim \mathrm{e}^{\pm i(\lambda x + \lambda^2 t)} \quad |\, x \,| \to \infty \tag{2.8}$$

を仮定すると (2.2) および (2.3) の解は次のように表せる。

$$\psi^{+} = \mathrm{e}^{i(\lambda x + \lambda^2 t)} \frac{f + ih}{f^*} \tag{2.9a}$$

$$\frac{h}{f} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\psi_j}{\lambda + \frac{a_j}{2}} \tag{2.9b}$$

$$(\theta_j - \frac{i}{a_j})\psi_j + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq j)}}^{N} \frac{2i}{a_j - a_k} \psi_k = 1, \ \ (j = 1, 2, ..., N) \tag{2.9c}$$

$$\psi^{-} = (\psi^{+})^* \tag{2.10}$$

$$\tilde{\psi}^{+} = -\frac{i}{\lambda} \frac{\partial \psi^{+}}{\partial x}, \ \tilde{\psi}^{-} = \frac{i}{\lambda} \frac{\partial \psi^{-}}{\partial x} \tag{2.11}$$

ここでλは正のスペクトルパラメータである。

2. 離散スペクトルに対する固有関数

無限遠で零となる境界条件、すなわち

$$\psi \to 0 \quad |\, x \,| \to \infty \tag{2.12}$$

には離散スペクトルが対応し、その固有関数は

$$g_j = \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial u}{\partial a_j} dx,\ g_{j+N} = \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial u}{\partial \xi_{j0}} dx,\ (j = 1, 2, ..., N) \tag{2.13}$$

$$u = u(x, t; a_1, a_2, ..., a_N, \xi_{10}, \xi_{20}, ..., \xi_{N0})$$

$$\tilde{g}_j = 2\frac{\partial g_j}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial a_j},\ \tilde{g}_{j+N} = 2\frac{\partial g_{j+N}}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial \xi_{j0}},\ (j = 1, 2, ..., N) \tag{2.14}$$

のように書ける。

D. 直交関係式

2つの関数ϕとψの内積を

$$< \phi(x, t, \lambda') \mid \psi(x, t, \lambda) >= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, t, \lambda')\psi(x, t, \lambda) dx \tag{2.15}$$

で定義すると、Cで導かれた固有関数の間には次の直交関係式が成立する。

$$< \tilde{g}_{j+N}(x, t) \mid g_k(x, t) >= - < \tilde{g}_j(x, t) \mid g_{k+N}(x, t) >$$

$$= 2\pi\delta_{jk},\ (j, k = 1, 2, ..., N) \tag{2.16}$$

$$< \tilde{\psi}^+(x, t, \lambda') \mid \psi^-(x, t, \lambda) >=< \tilde{\psi}^-(x, t, \lambda') \mid \psi^+(x, t, \lambda) >$$

$$= 2\pi\delta(\lambda' - \lambda) \tag{2.17}$$

ただし、上記以外の固有関数間の内積はすべて零となる。ここでδ_{jk}は Kronecker のデルタ、$\delta(\lambda' - \lambda)$ は Dirac のデルタ関数である。

III. 固有関数の完全性、および関連した問題

A. 固有関数の完全性

ここでの主要結果のひとつはIIで導かれた連続、および離散スペクトルに対応する固有関数が完全系をつくるということである。具体的には次のように表せる。

$$\int_{0}^{\infty} [\tilde{\psi}^+(x, t, \lambda)\psi^-(y, t, \lambda) + \tilde{\psi}^-(x, t, \lambda)\psi^+(y, t, \lambda)] d\lambda$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\big[\tilde{g}_{j+N}(x,t)g_j(y,t)-\tilde{g}_j(x,t)g_{j+N}(y,t)\big]=2\pi\delta(x-y) \tag{3.1}$$

これの証明は逆散乱法によらない純代数的な手法により行うことができる。

B. 線形 BO 方程式の初期値問題

完全性関係式 (3.1) を使うと線形 BO 方程式 (2.2) の初期値問題を解くことが可能となる。すなわち

$$\psi(x,t)=\int_0^\infty[\hat{\psi}^-(\lambda)\psi^+(x,t,\lambda)+\hat{\psi}^+(\lambda)\psi^-(x,t,\lambda)]d\lambda$$

$$+\sum_{j=1}^{N}[\hat{\psi}_{j+N}g_j(x,t)-\hat{\psi}_j g_{j+N}(x,t)] \tag{3.2}$$

ここで展開係数はψの初期値$\psi(x,0)$により一意的に決まり以下のように表せる。

$$\hat{\psi}^{\pm}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}<\tilde{\psi}^{\pm}(x,0,\lambda)\mid\psi(x,0)> \tag{3.3}$$

$$\hat{\psi}_{j+N}=\frac{1}{2\pi}<\tilde{g}_{j+N}(x,0)\mid\psi(x,0)> \tag{3.4}$$

$$\hat{\psi}_j=\frac{1}{2\pi}<\tilde{g}_j(x,0)\mid\psi(x,0)> \tag{3.5}$$

(2.3) の解は、関係式　$\tilde{\psi}=\psi_x$により直ちに求められる。

C. Nーソリトン解の線形安定性

(3.2) の長時間での振る舞いから Nーソリトン解の安定性を調べることができる。まず積分で表される連続スペクトルからの寄与は $t\to\infty$ のとき振動しながら減衰することが示せる。和で表された離散スペクトル部分からの寄与は

$$g_{j+N}\sim-\frac{2a_j}{(a_j\theta_j)^2+1},\ (t\to\pm\infty) \tag{3.6}$$

$$g_j\sim\frac{2(\theta_j-a_jt)}{(a_j\theta_j)^2+1},\ (t\to\pm\infty) \tag{3.7}$$

g_jは時間 t に比例した永年項を含むが、これはソリトンの位相定数ξ_{j0}をシフトすることにより位相の中に繰り込むことができる。この操作を行うと、解 (3.2) は初期値が有限であれば長時間後にも有限に収まる。これは Nーソリトン解が微小攪乱に対して安定であることを意味する。

D. 展開基底の変換

上記Cで述べた永年項を取り除くために新しい展開基底を導入する。

$$G_j = \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial u}{\partial a_j} dx,\ G_{j+N} = \int_{-\infty}^{x} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} dx,\ (j = 1, 2, ..., N) \tag{3.8}$$

$$\tilde{G}_j = 2\frac{\partial G_j}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial a_j},\ \tilde{G}_{j+N} = 2\frac{\partial G_{j+N}}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial \xi_j},\ (j = 1, 2, ..., N) \tag{3.9}$$

$$u = u(x, t; a_1, ..., a_N, \xi_1, ..., \xi_N),\ \xi_j = a_j t + \xi_{j0}$$

$$g_j = G_j + tG_{j+N},\ g_{j+N} = G_{j+N},\ (j = 1, 2, ..., N) \tag{3.10}$$

$$\tilde{g}_j = \tilde{G}_j + t\tilde{G}_{j+N},\ \tilde{g}_{j+N} = \tilde{G}_{j+N},\ (j = 1, 2, ..., N) \tag{3.11}$$

この変換を行うと離散スペクトルに対応する固有関数の長時間での振る舞いは

$$G_j \sim \frac{2(x - \xi_j)}{[a_j(x - \xi_j)]^2 + 1},\ (t \to \pm\infty) \tag{3.12}$$

$$G_{j+N} \sim -\frac{2a_j}{[a_j(x - \xi_j)]^2 + 1},\ (t \to \pm\infty) \tag{3.13}$$

となる。また完全性関係式は次のように表せる。

$$\int_0^{\infty} [\tilde{\psi}^+(x, t, \lambda)\psi^-(y, t, \lambda) + \tilde{\psi}^-(x, t, \lambda)\psi^+(y, t, \lambda)]d\lambda$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left[\tilde{G}_{j+N}(x, t)G_j(y, t) - \tilde{G}_j(x, t)G_{j+N}(y, t)\right] = 2\pi\delta(x - y) \tag{3.14}$$

新しい基底は以下の線形方程式を満たす。

$$\mathcal{L}\tilde{G}_j = -\tilde{G}_{j+N},\ \mathcal{L}\tilde{G}_{j+N} = 0,\ (j = 1, 2, ..., N) \tag{3.15}$$

$$\mathcal{L}^\dagger G_j = -G_{j+N},\ \mathcal{L}^\dagger G_{j+N} = 0,\ (j = 1, 2, ..., N), \tag{3.16}$$

$$\mathcal{L}\tilde{\psi}^\pm = \mathcal{L}^\dagger \psi^\pm = 0 \tag{3.17}$$

ここで $\mathcal{L}$ および $\mathcal{L}^\dagger$ は次の線形演算子である。

$$\mathcal{L}f = f_t + 2(uf)_x + Hf_{xx} \tag{3.18}$$

$$\mathcal{L}^{\dagger}f = f_t + 2uf_x + Hf_{xx} \tag{3.19}$$

IV. 多重ソリトン摂動論

A. 摂動項を持つ BO 方程式

ここではBO方程式のNーソリトン解に対する摂動の効果を多時間展開法により調べる。次の摂動項を持つ BO 方程式を考える。

$$u_t + 2uu_x + Hu_{xx} = \epsilon R[u],\ u = u(x,t) \tag{4.1}$$

ここでϵは正の小さなパラメータ、Rは摂動を表す。

B. 多時間展開法

多時間 t_jを $t_j = \epsilon^j t,\ (j = 0, 1, ...)$ によって導入すると、時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \frac{\partial}{\partial t_j} \tag{4.2}$$

で置き換えられる。さらに u をϵのべきに展開する。

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j u_j,\ u_j = u_j(x, t_0, t_1, ...) \tag{4.3}$$

これらを (4.1) へ代入すると u_jに対する方程式のヒエラルキーが得られる。最初の 2 つは次のように書ける。

$$\epsilon^0:\ u_{0,t_0} + 2u_0u_{0,x} + Hu_{0,xx} = 0 \tag{4.4}$$

$$\epsilon:\ \mathcal{L}u_1 = F_1, \tag{4.5}$$

ここで

$$\mathcal{L}u_1 \equiv u_{1,t_0} + 2(u_0u_1)_x + Hu_{1,xx} \tag{4.6a}$$

$$F_1 \equiv R[u_0] - u_{0,t_1} \tag{4.6b}$$

(4.4)、および (4.5) を解く為には初期条件を設定する必要があるが、ここでは Nーソリトンに対する摂動を考えているので

$$u_0 = u_N,\ u_j = 0\ (j \geq 1) \tag{4.7}$$

と置くことができる。ここで u_N は (2.4)-(2.6) の N ーソリトン解を表す。

C. u_1 および F_1 の展開

完全性関係式 (3.14) を用いると u_1、および F_1 は以下のように展開できる。

$$u_1(x,t) = \int_0^\infty [\hat{u}_1^-(t,\lambda)\tilde{\psi}^+(x,t,\lambda) + \hat{u}_1^+(t,\lambda)\tilde{\psi}^-(x,t,\lambda)]d\lambda$$

$$+\sum_{j=1}^{N}[\hat{u}_{1,j}(t)\tilde{G}_{j+N}(x,t) - \hat{u}_{1,j+N}(t)\tilde{G}_j(x,t)] \tag{4.8}$$

$$F_1(x,t) = \int_0^\infty [\hat{F}_1^-(t,\lambda)\tilde{\psi}^+(x,t,\lambda) + \hat{F}_1^+(t,\lambda)\tilde{\psi}^-(x,t,\lambda)]d\lambda$$

$$+\sum_{j=1}^{N}[\hat{F}_{1,j}(t)\tilde{G}_{j+N}(x,t) - \hat{F}_{1,j+N}(t)\tilde{G}_j(x,t)] \tag{4.9}$$

ここで展開係数は次の通りである。

$$\hat{u}_1^\pm(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi} < \psi^\pm(x,t,\lambda) \mid u_1(x,t) > \tag{4.10a}$$

$$\hat{u}_{1,j}(t) = \frac{1}{2\pi} < G_j(x,t) \mid u_1(x,t) > \tag{4.10b}$$

$$\hat{u}_{1,j+N}(t) = \frac{1}{2\pi} < G_{j+N}(x,t) \mid u_1(x,t) > \tag{4.10c}$$

$$\hat{F}_1^\pm(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi} < \psi^\pm(x,t,\lambda) \mid F_1(x,t) > \tag{4.11a}$$

$$\hat{F}_{1,j}(t) = \frac{1}{2\pi} < G_j(x,t) \mid F_1(x,t) > \tag{4.11b}$$

$$\hat{F}_{1,j+N}(t) = \frac{1}{2\pi} < G_{j+N}(x,t) \mid F_1(x,t) > \tag{4.11c}$$

上記表式において t は $(t_0, t_1, ...)$ を表す。

D. 展開係数の時間発展

1. ソリトンパラメータの時間依存性

摂動があるときソリトンパラメータは時間 ϵ^{-1} 程度のオーダーでゆっくり変化すると仮定すると

$$a_j = a_j(t_1, t_2, ...),\ (j = 1, 2, ..., N) \tag{4.12}$$

$$\xi_j = \xi_j(t_0, t_1, ...),\ (j = 1, 2, ..., N) \tag{4.13}$$

最低次解 u_0は a_jおよびξ_jを通じて t_1に依存するのでその t_1微分は

$$u_{0,t_1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(a_{j,t_1}\tilde{G}_j + \xi_{j,t_1}\tilde{G}_{j+N}) \tag{4.14}$$

と書き換えられる。

2. 非斉次項の表示

(4.5) の右辺の非斉次項 F_1の展開係数 (4.11) は (4.6b)、(4.14) および直交関係式を用いると以下のようになる。

$$\hat{F}_1^{\pm}(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi} < \psi^{\pm}(x,t,\lambda) \mid R[u_0] > \tag{4.15a}$$

$$\hat{F}_{1,j}(t) = -\frac{1}{2}\xi_{j,t_1} + \frac{1}{2\pi} < G_j(x,t) \mid R[u_0] > \tag{4.15b}$$

$$\hat{F}_{1,j+N}(t) = \frac{1}{2}a_{j,t_1} + \frac{1}{2\pi} < G_{j+N}(x,t) \mid R[u_0] > \tag{4.15c}$$

3. 展開係数の時間発展

(4.8)、および (4.9) を (4.5) へ代入し、展開基底の時間発展 (3.15)-(3.17) を使うと、展開係数の時間発展が導かれる。

$$\frac{\partial \hat{u}_1^{\pm}}{\partial t_0} = \hat{F}_1^{\pm} \tag{4.16a}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{1,j}}{\partial t_0} + \hat{u}_{1,j+N} = \hat{F}_{1,j},\ (j = 1,2,...,N) \tag{4.16b}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_{1,j+N}}{\partial t_0} = \hat{F}_{1,j+N},\ (j = 1,2,...,N) \tag{4.16c}$$

E. 永年項の消去

展開係数は $t_0 \to \infty$ において$\hat{u}_{1,j+N} \sim t_0,\ \hat{u}_{1,j} \sim t_0^2$のように振る舞うことが示せる。これを消去するために次の非永年条件を課す。

$$\hat{F}_{1,j} = 0,\ \hat{F}_{1,j+N} = 0,\ (j = 1,2,...,N) \tag{4.17}$$

これらの条件によりソリトンパラメータの時間発展が決定できる：

$$\frac{da_j}{dt} = -\frac{\epsilon}{\pi} < G_{j+N}(x,t)|R[u_0] >,\ (j = 1,2,...,N) \tag{4.18}$$

$$\frac{d\xi_j}{dt} = a_j + \frac{\epsilon}{\pi} < G_j(x,t)|R[u_0] >, \ (j = 1, 2, ..., N) \tag{4.19}$$

F. u_1の表示

(4.16)、および (4.17) より u_1の展開係数が定まる。初期条件である Nーソリトン解に対応して

$$\hat{u}_1^{\pm}(0,\lambda) = 0, \ \hat{u}_{1,j}(0) = \hat{u}_{1,j+N}(0) = 0, \ (j = 1, 2, ..., N) \tag{4.20}$$

と置くと

$$\hat{u}_1^{\pm}(t,\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} < \psi^{\pm}(x, t'_0, \lambda) \mid R[u_0] > dt'_0 \tag{4.21}$$

$$\hat{u}_{1,j}(t) = \hat{u}_{1,j+N}(t) = 0, \ (j = 1, 2, ..., N) \tag{4.22}$$

となる。これを (4.8) に代入すると (4.5) の解として

$$u_1(x,t) = \int_0^{\infty} [\hat{u}_1^{-}(t,\lambda)\tilde{\psi}^{+}(x,t,\lambda) + \hat{u}_1^{+}(t,\lambda)\tilde{\psi}^{-}(x,t,\lambda)]d\lambda \tag{4.23}$$

が得られる。これは展開の主要項であるソリトンに対する補正であり、radiation あるいは tail と呼ばれている。上記解はϵ^{-1}程度の時間範囲まで有効であるが、これ以上の時間における解の振る舞いを調べるにはさらに高次項を導入する必要がある。

G. 修正された保存則

BO 方程式は無限個の保存則

$$I_n[u] = \int_{-\infty}^{\infty} q_n[u]dx, \ (n = 1, 2, ...) \tag{4.24}$$

を有する。方程式に摂動が加わると保存則は修正され、その時間発展は以下のように書ける。

$$\frac{dI_n}{dt} = \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta I_n}{\delta u(x,t)} R[u(x,t)]dx \tag{4.25}$$

ϵのオーダーまで保持するとこの関係式は

$$\epsilon \left[\frac{\partial I_n[u_0]}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta I_n}{\delta u} \right)_{u=u_0} u_1 dx \right]$$
$$= \epsilon \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\delta I_n}{\delta u} \right)_{u=u_0} R[u_0]dx + O(\epsilon^2), \ (n = 1, 2, ...), \tag{4.26}$$

となる。Nーソリトン解に対しては

$$I_n[u_0] = 2\pi \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{a_j}{2}\right)^{n-1} \tag{4.27}$$

$$\left(\frac{\delta I_n}{\delta u}\right)_{u=u_0} = (n-1)\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{a_j}{2}\right)^{n-3}\psi_j\psi_j^*$$

$$= -(n-1)\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{a_j}{2}\right)^{n-2} G_{j+N},\ (n \geq 2) \tag{4.28}$$

ここで得られた摂動解は修正された保存則と矛盾しないことが示される。実際 $n=1$ に対して (4.26) は

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\int_{-\infty}^{\infty} u_1 dx = \int_{-\infty}^{\infty} R[u_0]dx \tag{4.29}$$

と書けるが、これは系の質量保存に対応する。u_1の表式 (4.23) はこれを満足することが示される。$n \geq 2$ に対しては (4.26) は

$$\pi\sum_{j=1}^{N} a_j^{n-2}\frac{\partial a_j}{\partial t_1} = -\sum_{j=1}^{N} a_j^{n-2}\int_{-\infty}^{\infty} G_{j+N}R[u_0]dx. \tag{4.30}$$

と表せるが、これはソリトンの振幅の発展方程式 (4.18) によって満足される。

V. 散逸摂動の例

散逸摂動の例として次のものを考える。

$$R[u] = -\mu u\ (\mu > 0) \tag{5.1}$$

ここでは1ーソリトンへの摂動の影響をIV章での結果に基づいて考察する。摂動解は以下のように書ける。

$$u = \frac{2a}{z^2+1} + \epsilon u_1,\ z = a(x-\xi) \tag{5.2}$$

$$\frac{da}{dt} = -2\epsilon\mu a,\ \frac{d\xi}{dt} = a \tag{5.3a}$$

$$a = a_0 \mathrm{e}^{-2\epsilon\mu t},\ \xi = \frac{a_0}{2\epsilon\mu}(1-\mathrm{e}^{-2\epsilon\mu t}) + \xi_0 \tag{5.3b}$$

$$u_1(z,t) = \frac{\mu a}{2}\frac{z-i}{z+i}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{i\lambda z/a}\left[1 + i\frac{a}{(z+i)(\lambda+\frac{a}{2})}\right] \times$$

$$\times \frac{1-\mathrm{e}^{i\lambda(\lambda+a)t}}{i\lambda(\lambda+a)} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda/a}}{\lambda+\frac{a}{2}} d\lambda + (c.c.) \tag{5.4}$$

u_1の長時間での振る舞いは、時間、空間領域に依存して次の2通りの場合に分けて考える必要がある：

1. $-a^2t < z,\ t \to \infty$

$$u_1(z,t) \sim -\frac{2\mu}{a}\Big[\frac{z^4+6z^2-3}{(z^2+1)^2}\Big\{\tan^{-1}(z+a^2t) - \tan^{-1} z\Big\} + \frac{4z}{(z^2+1)^2} \ln\frac{(z+a^2t)^2+1}{z^2+1}\Big]. \tag{5.5}$$

この表式は $-a^2t << z << -1$ の範囲では $u_1 \sim -2\pi\mu/a$ と近似できるが、これはソリトンの後方での shelf の形成を意味する。

2. $z < -a^2t,\ t \to \infty$

この範囲では、解は振動しながら減衰する波列を表す。

VI. 参考文献

[1] Y. Matsuno and D.J. Kaup, Phys. Lett. **A 228**, 176(1997); J. Math. Phys. **38**, 5198(1997).

[2] Y. Matsuno, Int. J. Mod. Phys. **B9**, 1985(1995).